

Fundamentos Matemáticos de la Informática II
Ejercicios

Hoja 7 - Diagonalización

1. Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ la aplicación lineal tal que $f(1, 0) = (2, -3)$ y $f(0, 1) = (1, -2)$.
 - a) Calcular los valores propios λ_1 y λ_2 de f y autovectores v_1 y v_2 para cada autovalor.
 - b) Calcular la matriz P de cambio de la base $\{(1, 0), (0, 1)\}$ a la base $\{v_1, v_2\}$ formada por los vectores del apartado anterior.
 - c) Calcular la matriz asociada a f respecto a la base $\{v_1, v_2\}$.

2. Determinar si son o no diagonalizables las siguientes matrices con coeficientes en \mathbb{R} , y en caso de serlo, calcular la matriz de paso. Calcular C^{35} y D^{100} .

a) $A = \begin{pmatrix} \cos a & \operatorname{sen} a \\ \operatorname{sen} a & -\cos a \end{pmatrix}$. c) $C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$. e) $E = \begin{pmatrix} -6 & -9 & -9 \\ 0 & -3 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. d) $D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

3. Consideremos las matrices con coeficientes en \mathbb{C}

$$A = \begin{pmatrix} 1 & i & i \\ i & 1 & i \\ i & i & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- a) Determinar si $v = (1, 1, 1)$ es un vector propio de A .
 - b) Calcular los autovalores y los espacios propios de A y de B .
 - c) ¿Son A y/o B diagonalizables?
4. Sean $A, B \in M_n(K)$. Se dice que A es semejante a B , y se denota $A \sim B$, si existe una matriz inversible $P \in M_n(K)$ tal que $B = P^{-1} * A * P$.

Demostrar que "es semejante a" es una relación binaria de equivalencia en el conjunto $M_n(K)$.

Demostrar que si A es semejante a B , entonces

- a) A y B tienen el mismo polinomio característico;
- b) si v es un vector propio de A , entonces $P^{-1} * v$ es un vector propio de B ;
- c) A^n es semejante a B^n para todo $n \in \mathbb{Z}^+$;
- d) $\det A = \det B$;
- e) B es inversible si, y sólo si A lo es;
- f) A^{-1} es semejante a B^{-1} cuando A (y por lo tanto B) es inversible.